PART3 円順列

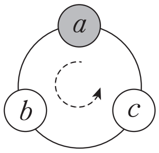
要点 ① 円順列

「円順列」… いくつかのものを「　　　　」に並べる順列。

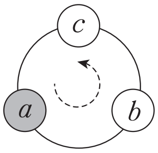
円順列では，回転すると一致する並び方は同じ並び方，と考える。

例えば，3 個の文字 a，b，c を円形に並べるとき，以下の①，②，③は，円順列としては同じ並び方であり，a に注目し，a から反時計回りに文字を追っていくと，すべて abc である。

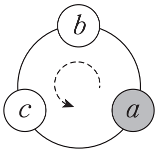
①



②

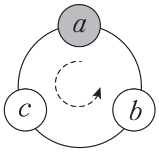


③

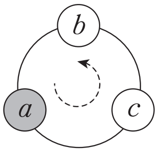


また，反時計回りに文字を追うと acb となる円順列は，以下の④，⑤，⑥のように 3 通りできる。

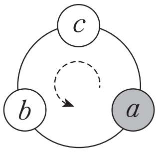
④



⑤



⑥



3 個の文字 a，b，c の順列は，3! 通りある。そのいずれの場合も，回転すると一致するものが　通りずつできる。よって，3 個の文字 a，b，c の円順列の総数は

$$3! \quad = \frac{3!}{\quad} = \frac{3\cdot2\cdot1}{3} = 2\cdot1 = 2 \text{（通り）}$$

である。

また，①～③，④～⑥のそれぞれの代表として①と④に注目すると，この 2 つの違いは b と c の並び順，すなわち　　　　　　　　　　　である。つまり，文字 a の場所を　　　　し，残りの 2 つの文字 b，c の順列を考えることで，円順列の総数を求めることができ，その総数は

$$\quad = 2 \text{（通り）}$$

である。

一般に，次のことがいえる。

円順列の総数

異なる n 個のものの円順列の総数は　$\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$

例　4 人が輪の形に並ぶとき，並び方の総数は

$=\qquad=\qquad=6$（通り）

円順列において，裏返すと一致する並び方を同じ並び方とするとき，その順列を「じゅず順列」という。円順列には，裏返すと一致するものが 2 つずつあるから，異なる n 個のもののじゅず順列の総数は

$\dfrac{(n-1)!}{2}$ 通り

である。

3 (1) A, B, C, D, Eの5人が円形に並ぶとき，次のものを求めよ。

(i) 並び方の総数　　(ii) AとBが隣り合う並び方の総数

(2) 異なる6個の玉をつなげて首飾りを作るとき，何種類の首飾りができるか。

Point Pickup

円順列・じゅず順列

異なる n 個のものの円順列の総数は $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$

円順列の考え方は，以下の2つ

・順列の総数を，重複度合いで割る。

・あるものを固定し，残ったものの順列の総数を考える。

異なる n 個のもののじゅず順列(円順列において，裏返すと一致するものを同じものとみなす順列)の総数は $\dfrac{(n-1)!}{2}$

第 2 講　PART3 確認問題

1　6 人が手をつないで 1 個の輪をつくるとき，並び方は全部で [アイウ] 通りある。

2　a，b，c，d，e，f の 6 人が円形に並ぶとき，a と b が隣り合うような並び方は全部で [エオ] 通りある。

3　異なる色の玉 8 個をひもでつなげて首飾りを作るとき，並べ方の異なるものは全部で [カキクケ] 通りある。
ただし，裏返すと同じ並び方になるものは同じものとみなす。

PART3 円順列

3 (1) A，B，C，D，E の 5 人が円形に並ぶとき，次のものを求めよ。

(i) 並び方の総数　　(ii) A と B が隣り合う並び方の総数

(2) 異なる 6 個の玉をつなげて首飾りを作るとき，何種類の首飾りができるか。

[解答]

(1)(i) A を固定すると，求める並び方の総数は残りの 4 人の順列である。

よって $4!=24$ (通り)

(ii) A と B を 1 組と考えて，この 2 人を固定すると，残り 3 人の順列は $3!$ 通り。

1 組と考えた 2 人の並び方は $2!$ 通り。

よって，求める並び方の総数は $3!\times 2!=6\times 2=12$ (通り)

(2) 異なる 6 個の玉を円形に並べる方法は $5!$ 通り。

これを首飾りにしたとき，裏返すと同じ並び方になるものが 2 通りずつある。

よって，求める場合の数は $\dfrac{5!}{2}=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2}=60$ (種類)

第 2 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイウ：120

[解説]

6 人が輪を作る方法は，6 個のものの円順列の数に等しい。

$(6-1)!=5!$ [A]

$=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=\mathbf{120}$ **(通り)**

[A]　異なる n 個のものの円順列の総数は，
$(n-1)!$

2

[正解] エオ：48

[解説]

a と b が隣り合うので，この 2 人をまとめて 1 人と考えると，[B]

並び方は 5 個のものの円順列だから，

$(5-1)!=4!$ (通り)

このそれぞれに対して，a と b の並び方が $2!$ 通りあるから，[C]

求める場合の数は，

$4!\times2!=4\cdot3\cdot2\cdot1\times2\cdot1=\mathbf{48}$ **(通り)**

[B]　隣り合う場合にはそれらを 1 つのものとみなす。

[C]　a と b も並べ方があることに注意する。

3

[正解] カキクケ：2520

[解説]

異なる 8 個の玉を円形に並べる方法は，8 個のものの円順列の数に等しいから，

$(8-1)!=7!$ (通り) [D]

これを首飾りにしたとき，裏返すと同じ並び方になるものが 2 通りずつある。[E]

よって，求める場合の数は，[F]

$$\frac{7!}{2}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2}=\mathbf{2520}\text{ (通り)}$$

[D]　まずは円順列を考える。

[E]　同じものが 2 通りずつあるので，全体を 2 で割る。

[F]　異なる n 個のもののじゅず順列の総数は，
$\dfrac{(n-1)!}{2}$